



TITLE:

非平衡散逸系とレヴィフライト (力学系理論と複雑系の数理)

AUTHOR(S):

田村, 公洋; 日高, 芳樹; 甲斐, 昌一

CITATION:

田村, 公洋 ...[et al]. 非平衡散逸系とレヴィフライト (力学系理論と複雑系の数理). 数理解析研究所講究録 2002, 1244: 40-46

ISSUE DATE:

2002-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41670>

RIGHT:

非平衡散逸系とレヴィフライト

九大 工 田村公洋 (Koyo Tamura), 日高芳樹 (Yoshiki Hidaka), 甲斐昌一 (Shoichi Kai)
Department of Applied Physics, Faculty of Engineering, Kyushu Univ.

1 はじめに

系にマクロな揺動が存在することによってマクロなスケールでの輸送現象が促進される現象が, 非平衡開放系においてしばしば見られる. よく知られた例としては, 乱流中で拡散が促進される乱流拡散がある.

このような現象では, 通常の輸送現象において分子の熱運動が果たした役割をマクロな揺動が担っているが, その揺動が非熱的であるために平衡系とは異なる新しい物性が生じていると考えられる. したがってこの非熱的揺動が, 非平衡開放系の統計物理において中心になる要素であると考えられる. 我々は, 輸送現象の中でも特に, 弱非線形時空カオス中での拡散に着目して研究を行った. 通常の熱運動による拡散の研究においては, ブラウン運動の解析が重要であった. 時空カオス中に混入した微細な粒子でも, マクロな揺動による類似のランダムな挙動が見られる. ここでは, この挙動も「ブラウン運動」と呼ぶことにするが, この「ブラウン運動」を解析することで, マクロな揺動の統計的性質を知る事が期待できる.

また流体力学の分野では, 流体運動の記述形式として Lagrange 形式と Euler 形式が存在する. この「ブラウン運動」の解析からは Lagrange 的な量が求められ, 揺動の源である空間パターンの解析からは, 一般に Euler 的な量が求められる. 冒頭で述べた乱流拡散では, Euler 的視点でも Lagrange 的視点でもカオスの振舞をみせる. しかし, 対流ロールが時間的に振動する振動レイリー・ベナール対流では, Euler 的には規則的な振舞を示しているにもかかわらず, Lagrange 的にはカオティックな振舞が現れる.

この比較から明らかなように, マクロな揺動による拡散を解明するには, まずは Lagrange 的な視点からのアプローチが求められる. その上で, 時空カオスのパターンの解析から得られた Euler 的な量との関係を解明することが必要である.

我々は最近, 液晶の電気対流系で見出された時空カオスである「ソフトモード乱流」を用いてこの「ブラウン運動」の解析を行った. ある種の液晶系に電場を加えると, ある閾値電圧 V_F で系の二次元回転対称性が自発的に破れる. さらに, V_F より高い閾値電圧 V_C で電気対流が発生する. このとき, 回転対称性の自発的な破れに伴う南部-ゴールドストーンモードと対流モードの非線形相互作用で, 対流パターンは時空カオス状態となる [1]. この時空カオスは電圧でコントロールできるが, 通常 V_C を用いて規格化した無次元量 $\epsilon = V^2 - V_C^2 / V_C^2$ をコントロールパラメータとして用いる.

ソフトモード乱流は次のような特徴をもつ.

1. 局所的には対流構造を保ったまま, 対流の波数ベクトルの向きがランダムになっている時空カオスである. (図 1a)

2. 空間 2 次元の時空カオスと見なすことができる.
3. マクロに見ると等方的である. (図 1b)
4. 対流発生と同時に超臨界的に時空カオスが現れる. つまり $\epsilon = 0$ は, 対流の発生点であると同時に時空カオスの発生点でもあり, そこではカオス揺らぎの相関時間が発散する.
5. ソフトモード乱流は電場によって制御できるため, 熱対流系に比べて系の制御が容易である.
6. ソフトモード乱流を記述する方程式が提案されており, 数値計算と実験の両面から扱える.

第 4 の特徴から, ϵ を 0 に近づけることで南部-ゴールドストーンモードによるパターンのマクロゆらぎの振幅をどこまでも小さくできる. したがって, $\epsilon = 0$ の近傍では非線形性が非常に弱い時空カオスとなることがわかる. このような特徴を持つ系は他に知られていない. 流れに乗りやすい軽いトレーサーを用いて, 「ブラウン運動」を観測する場合, 他の乱流では揺らぎが激しすぎ, 乱流への分岐点近傍ですらトレーサーを追跡することは困難となるが, ソフトモード乱流ではこの特徴のおかげで ϵ を充分小さく調整すればこのようなことはない. この点でも時空カオスへの分岐点近傍での「ブラウン運動」の観測に向いた系である.

以上のような理由から我々はソフトモード乱流を揺動の場として用いた. 本研究で我々はソフトモード乱流による拡散を解明するため, Lagrange 的視点から 2 つの実験を行った.

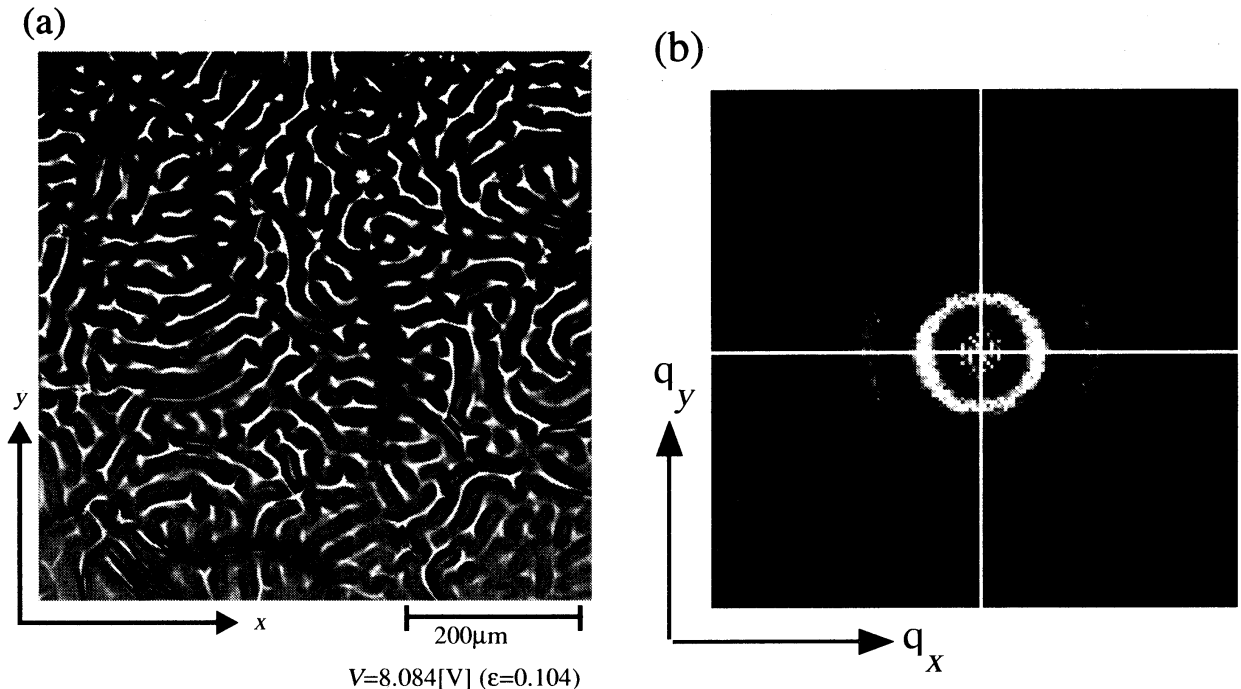


図 1: ソフトモード乱流. スナップショット (a) と 2 次元パワースペクトル (b). (a) の写真で白く見えているのは対流ロールである. (b) は, (a) のような画像から 2 次元 FFT を経

2 実験

実験に用いたサンプル・セルは、液晶層の厚みが $50\mu\text{m}$ 、平面形が $10\text{mm} \times 10\text{mm}$ の正方形のものである。液晶をはさむガラスの内側の面には、ITO(Indium Tin Oxide) が透明電極として蒸着されている。さらに、ITO の上には DMAOP(*n*-Octadecyl-Dimethyl-Ammonium chloride) が配向剤として塗布されており、ホメオトロピック配向が実現されている。このようにして組み立てたサンプル・セルに、液晶と、トレーサーとして用いる微粒子をごく少量封入した。液晶は、EHD の研究における標準的な試料である MBBA(*p*-Methoxy-Benziliden-*p'*-Buthyl-Annyline) を用い、試料の電気伝導度を上げるために、TBAB(Tetra-*n*-Buthyl-Ammonium Bromid) を $0.01\text{wt}\%$ 溶かしたものを用いた。液晶に混入するトレーサー微粒子としては、シリカとポリスチレンの粒子を用いた。粒径はそれぞれ $10\mu\text{m}$ (シリカ) と $3.88\mu\text{m}$ (ポリスチレン) である。

最初に行った実験ではシリカをトレーサーに用いた。この実験では一つの粒子を 3s ごとに 5547s 追跡し、その位置を測定した。その時系列から拡散範囲の時間依存性とトレーサーの速度分布を求めた。

その後印加電圧に対する依存性を調べるために電圧を変えてトレーサーを追跡し、トレーサーの速度分布の変化を調べた。この実験では観測した全ての電圧で同じ粒子を追うことが困難であるため、粒径の標準偏差が $0.21\mu\text{m}$ と小さいポリスチレンをトレーサーとして用いた。

両実験ともセルに交流 100Hz の電圧を印加してソフトモード乱流を起こし、トレーサー粒子の軌跡を記録した。印加電圧は、しきい値からの距離をしきい値で規格化した制御パラメータ $\epsilon = (V^2 - V_c^2)/V_c^2$ を用いて以降表す。実験中はセルの温度を 30.0°C に固定した。また、トレーサーの追跡は、 3s ごとにトレーサーの位置を測定することで行った。

3 結果と考察

図2に観測された「ブラウン運動」の軌跡を示す。観察した粒子はシリカであり、 $\epsilon = 0.1$ である。このソフトモード乱流中の「ブラウン運動」の、通常のブラウン運動との違いは、粒子がほぼ同じ方向に連続して動く状態(以降フライトと呼ぶ)とほぼ一箇所に長時間留まっている状態が、間欠的に現れることである。

図3aは図2の粒子の速度の絶対値の時間変化であるが、間欠的に速度が大きくなっている。その間欠性のため、図3bのスペクトルには $1/f$ の傾向を見ることができる。これは、揺動がガウ斯的ではないことを示している。このような非ガウ斯的な振る舞いは、熱揺動によるブラウン運動ではみられない。

さらにガウ斯的でないことを確かめるために、速度の分布を求めたのが図4である(ここでは x 方向の速度の分布を示しているが、系は基本的に等方なので方向による違いは現れない)。図中に破線で示したのがガウス分布である。分散と平均(≈ 0)をサンプルから計算し、それらを用いてこのガウス分布を計算した。明らかに計測された分布はガウス分布ではないことがわかる。実線で示しているのは、冪分布(次式)によるフィッティング

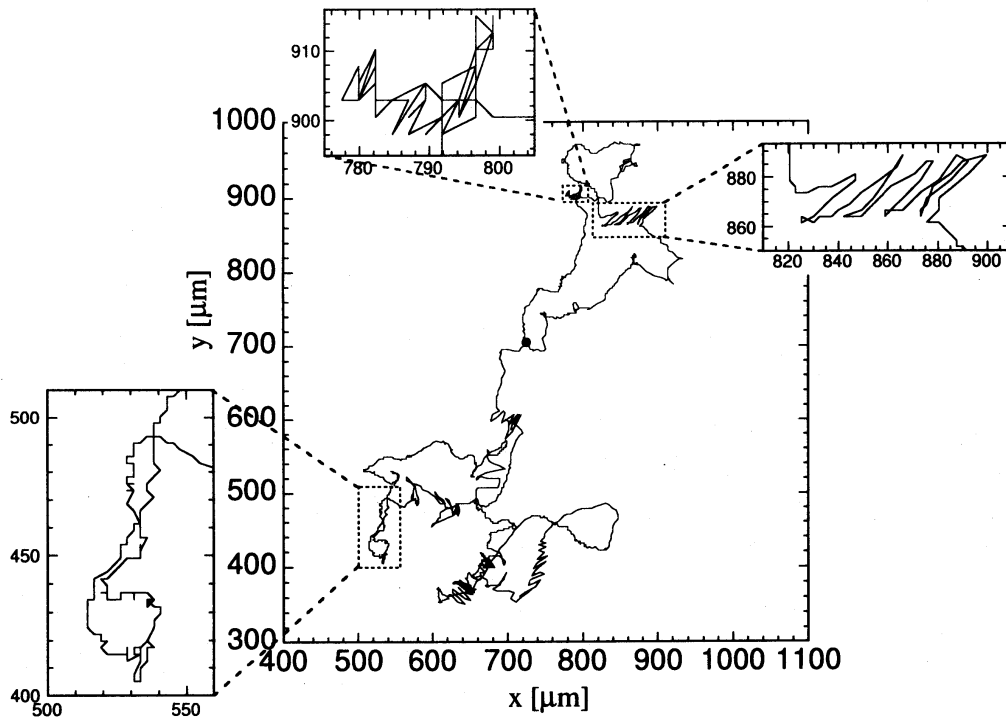


図 2: 「ブラウン運動」の軌跡. $\epsilon = 0.1$ トレーサーはシリカである. 観測時間は 5547s.

の結果である. 冪分布には良く一致していることがわかる.

$$P(V_X) = \frac{P_0}{|V_X|^{1+\beta}}$$

このような速度分布を異なる ϵ について求めた. ここでは, 上述の理由でポリスチレン球をトレーサー粒子として用いた実験結果を示す. $\epsilon = 0.05$ から $\epsilon = 0.09$ までの結果を図 5 に示す. この結果は, 次式の指数関数でうまくフィッティングすることができた.

$$P = P_0 e^{-|V_{X,Y}|/V_0}$$

図 4 では冪分布であったのが図 5 では指数分布となっているが, この違いはトレーサー微粒子をシリカからポリスチレンに変更したためだと考えられる. このように分布はトレーサーとして用いる微粒子の種類に依存するが, その詳細はいまだ不明である. そこで, 分布の定性的な変化にのみ着目する.

まず, 縦軸を対数で取ると, ほぼ直線上に分布しているが, ϵ が大きくなるにつれて直線の傾きが大きくなる, つまり分布の裾が減少する傾向が見られた. ここからさらに ϵ を増大させていくと ($\epsilon = 0.1, 0.2$), 分布はガウス分布でよくフィッティングすることができた (図 6). 以上の二点の結果は, 時空カオスの ϵ 依存性を反映していると考えられ, トレーサーの大きさや密度に依存しない性質であると考えられる.

図 2 の結果から, さらに次式で定義される量を求めた.

$$D(\tau) = \frac{\langle |\mathbf{r}(t+\tau) - \mathbf{r}(t)|^2 \rangle}{2d\tau}$$

ここで d は空間の次元数であり、2 としている。 $D(\tau)$ は、 τ が無限大の極限で通常の拡散係数の定義に一致する。 図 7 に計算結果を示す。 τ が 1000 秒未満の領域で、 $D(\tau)$ は τ に対して冪依存性を示した。 また、 τ が大きい領域では $D(\tau)$ は一定の値に近付いているように見える。

$D(\tau)$ が τ の冪で変化する現象は「異常拡散」と呼ばれており、このような拡散が見られる現象としてレヴィ・フライトが知られている [2]。 また、レヴィ・フライトでは長距離の移動(フライト)が間欠的に見られる。 さらに、レヴィ・フライトを特徴づける分布としてレヴィ分布が知られているが、これは分布の裾が冪分布である。 レヴィ・フライトの特徴をシリカを用いた実験の結果(図 2,4)と比較すると両者は似ている。 つまり間欠的なフライトが存在し、分布に冪分布が現れる。 そして、 $D(\tau)$ の振舞は τ が小さい領域で冪的である。 ポリスチレンを用いた実験(図 5)では冪分布は現れていないが、しかし図 5 の分布もガウス分布に比べて裾が広がっているという特徴は冪分布と同様である。 これらのことから τ が 1000 秒未満の近距離の「ブラウン運動」の挙動はレヴィ・フライト的である。

図 7 からはシリカの「ブラウン運動」の挙動が $\tau = 1000\text{s}$ の近辺から急激に変化しているのが見てとれる。 1000s で拡散する距離を $D(\tau)$ から見積るとおよそ $200\mu\text{m}$ である。 対流ロールの幅がおよそ $30\mu\text{m}$ であるからこれは対流ロール 7 本分の距離である。 このスケールはソフトモード乱流の空間パターンにおいて対流ロールの向きが揃っているサイズ [3](これを以後 patch と呼ぶ) にほぼ同程度である。 このことから対流ロールの向きが揃っている範囲内でフライトが起きていると考えられる。 この patch のサイズは ϵ の増大と共に小さくなっていく。 従って ϵ が大きい領域では長距離のフライトが現れなくなり、その結果、粒子の振舞は通常のブラウン運動に近づく。 それが速度分布に反映してガウス分布が現れていると考えられる。

本研究の実験・解析で見られた振舞は、従来のオイラー的な視点に基くパターン・ダイ

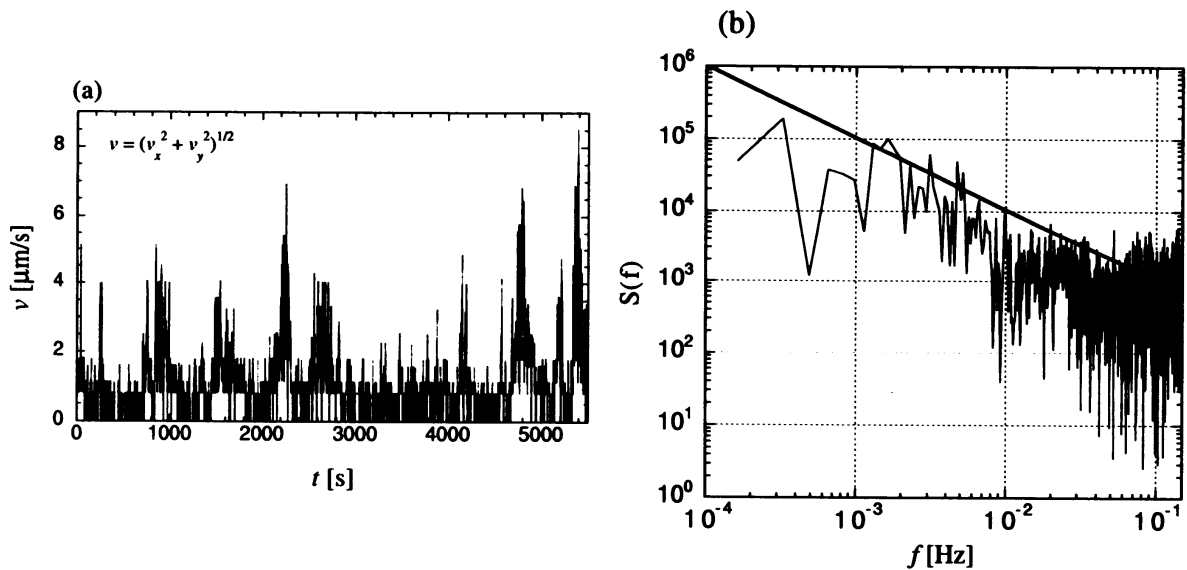


図 3: 「ブラウン運動」の速度の絶対値の時間変化 (a) と (a) のスペクトル (b)。 図中の実線は $1/f$ の傾きを示す。

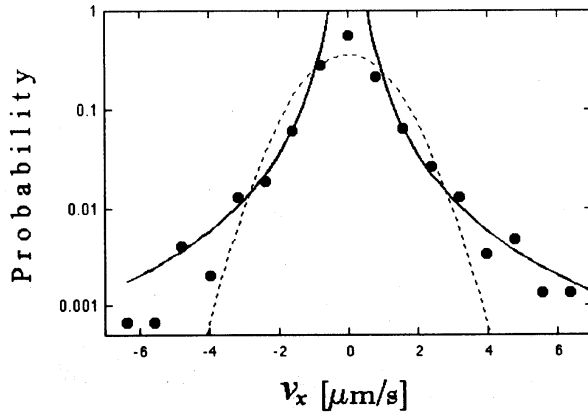


図 4: 速度分布 (x 軸方向) 破線と実線はガウス分布と冪分布をそれぞれ示している。 $\epsilon = 0.1$ トレーサーはシリカである。

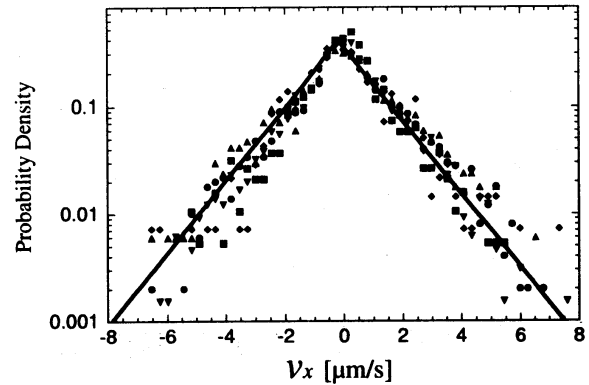


図 5: 速度分布 ($\epsilon = 0.05 - 0.09$). トレーサーはポリスチレンである。

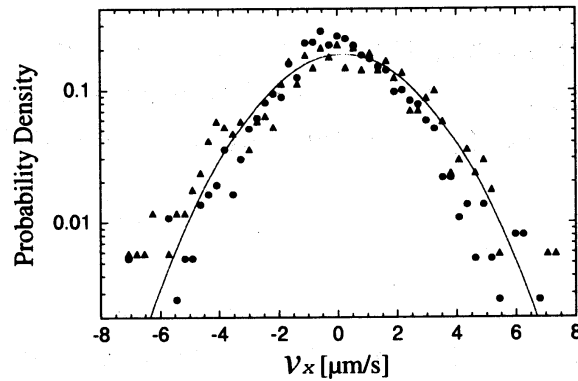


図 6: 速度分布 ($\epsilon = 0.1, 0.2$). トレーサーはポリスチレン, 図中の破線はガウス分布である。

ナミクスの解析のみでは観測されない。Euler 的視点ではパターン揺らぎは常にガウスのである [4]。参考文献 [4] ではパターン揺らぎの時間相関を求めているが、これは時間の経過とともに指数的に相関が消失しており、通常の熱平衡系で現れる時間-空間相関と同じである。

4 まとめ

本研究では、ソフトモード乱流による拡散を解明するために、Lagrange 的視点から「ブラウン運動」の実験を行い、その結果次のような事が判った。

ソフトモード乱流による拡散では特性長が存在し、特性長内の拡散では異常拡散のように振る舞うが、特性長外では熱平衡系で見られる通常の拡散のように振る舞う。ソフト

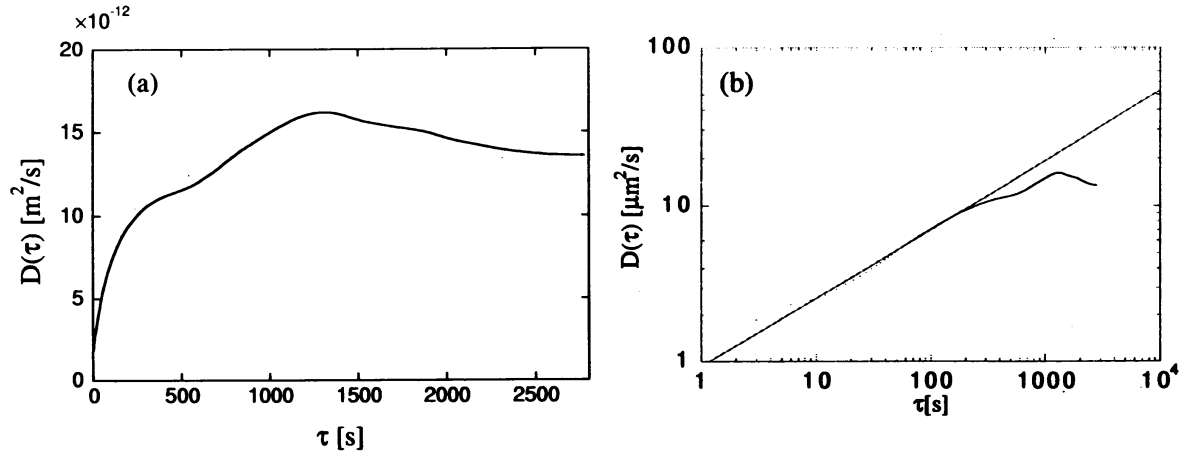


図 7: 拡散係数 $D(\tau)$. (b) は log-log でプロットしたものである.

モード乱流による拡散では粒子の速度分布は低 ϵ においてガウス分布から大きく外れる. ϵ を増大させていくと分布の裾野が小さくなっていき, 十分 ϵ が大きい領域では速度分布はガウス分布になる.

このような非ガウスの分布はこれまでのパターンダイナミクス (Euler 的な解析) では得られていない. これは時空カオス中での「ブラウン運動」を Langevin 方程式から論じる場合, 揺動項の統計的性質を知るのに時空カオスの Euler 的な統計では不十分であることを意味する.

参考文献

- [1] S. Kai, K. Hayashi and Y. Hidaka, J. Phys. Chem. **100**, 19007 (1996).
- [2] B.S. Williams, D. Marteau and J.P. Gollub, Phys.Fluids. **9**, 2061 (1997).
- [3] K.Tamura, Y.Yusril, Y.Hidaka and S.Kai, J.Phys.Soc.Jpn. **70**, 2805 (2001).
- [4] Y.Hidaka, J.-H.Huh, K.Hayashi, M.I.Tribelsky and S.Kai, Phys.Rev.E **56**, R6256 (1997).